Cálculo I
Bloque I: Números, funciones, límites y continuidad.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2020-21

Números enteros, racionales y reales.

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Desarrollos decimales finitos o infinitos periódicos.

Números reales

$$\mathbb{R}$$

Todo tipo de desarrollos decimales.
Los desarrollos decimales infinitos no periódicos corresponden a los números **irracionales**, los reales que no son racionales: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Forma binómica y operaciones.

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. **Unidad imaginaria** i, $i^2 = -1$
2. **Parte real**: $\mathcal{R}e\, z = a \in \mathbb{R}$
3. **Parte imaginaria**: $\mathcal{I}m\, z = b \in \mathbb{R}$

Suma y producto de números complejos

$z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\begin{aligned} \text{SUMA:} \quad & z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ \text{PRODUCTO:} \quad & z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y las operaciones de $\mathbb{C}$ extienden a las de $\mathbb{R}$.

Conjugado. Cociente.

Complejo conjugado

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

1. La suma de los conjugados es el conjugado de la suma: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$.
2. El producto de los conjugados es el conjugado del producto: $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$.
3. Producto de un número por su conjugado: $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Cociente de números complejos

$z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

El **inverso** de un número complejo $z = a + bi \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2 + b^2}\bar{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Módulo y argumento de un número complejo

Módulo de un número complejo

El **módulo** del número complejo $z = a + bi$ es el número positivo (o 0 si $z = 0$):
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
Se tiene por tanto $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Argumento de un número complejo

El **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ es el ángulo que comienza en el semieje real positivo y termina en el segmento que une el origen con el punto (a, b).
Se representa por $\arg z$.
Se considera también argumento a cualquier otro ángulo que se diferencie del anterior en un múltiplo de 2π.
El valor del argumento entre 0 y 2π se obtiene mediante la fórmula:
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & \text{si } a > 0 \text{ y } b \geq 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi & \text{si } a < 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \\ \operatorname{arctg}(b/a) + 2\pi & \text{si } a > 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Forma polar

Forma polar de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi$, llamamos $r = |z|$ a su módulo y $\theta = \arg z$ a su argumento:
$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\operatorname{sen}\theta$$
y así
$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Producto y cociente en forma polar

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right)$$
es decir

- El módulo del producto es el producto de los módulos: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- El argumento del producto es la suma de los argumentos:
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Si $z_2 \neq 0$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Potencias y raices enteras de un número complejo

Potencia entera de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi = r(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = (a + bi)^n = r^n(\cos n\theta + i\ \mathrm{sen}\, n\theta)$$

Raíz entera de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi = r(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta)$ y $n \in \mathbb{N}$:
Si $z \neq 0$ entonces z tiene n raíces n-ésimas distintas w_k, $(w_k)^n = z$.

Todas las raíces n-ésimas tienen el mismo módulo: $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$
y argumentos:

$$\arg(w_k) = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

Un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raices (contando las repeticiones).

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\ \mathrm{sen}\,\theta$$

Así

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta) = r\,e^{i\,\theta}$$

Operaciones

$$z_1 = r_1\,e^{i\,\theta_1} \text{ y } z_2 = r_2\,e^{i\,\theta_2}$$

Producto:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,e^{i\,\theta_1} r_2\,e^{i\,\theta_2} = r_1 r_2\,e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}$$

Cociente:

$$z_1/z_2 = r_1\,e^{i\,\theta_1}/(r_2\,e^{i\,\theta_2}) = r_1/r_2\,e^{i\,(\theta_1-\theta_2)}$$

Potencia:

$$z^n = \left(r\,e^{i\,\theta}\right)^n = r^n\,e^{i\,n\theta}$$

Terminología sobre funciones

Definición

*Una **función** f de un conjunto A en un cojunto B es una regla que asigna a cada elemento x de A exactamente un elemento, llamado **imagen** de x y denotado $f(x)$, del conjunto B.*

- Notación: $f\,:\,A \longrightarrow B$.
- El conjunto A se denomina **dominio** de f.
- Si una función f está expresada mediante una fórmula y no se especifica su dominio, éste es el mayor subconjunto de números reales x para los que $f(x)$ es un número real.
$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$
- Dos funciones expresadas mediante la misma fórmula si tienen distintos dominios se consideran funciones distintas.
- El conjunto de todos los elementos $y \in B$ para los que existe un $x \in \mathrm{dom} f$ tal que $y = f(x)$ se denomina **rango**, o imagen, de f.
$$\mathrm{rango} f = \{y \in B : \text{existe } x \in \mathrm{dom} f \text{ con } y = f(x)\}$$
El rango de f no tiene por qué coincidir con B.
- A x se le denomina variable **independiente** y a y variable **dependiente**.

Gráficas de funciones

Definición

*En el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares del plano, la **gráfica** de una función f es el conjunto de puntos de coordenadas $(x, f(x))$ donde x pertenece al dominio de f.*
$$\mathrm{graf} f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathrm{dom} f\}$$

- Se puede decir que $y = f(x)$ es la ecuación de la gráfica de f.
- Si tenemos una curva en el plano, ésta puede ser la gráfica de una función si y sólo si cada recta vertical (paralela al eje y) corta a la curva como mucho en un punto.
- El dominio de una función es la proyección ortogonal de su gráfica sobre el eje x.
- El rango de una función es la proyección ortogonal de su gráfica sobre el eje y.

Operaciones aritméticas

Definición

*Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f+g$, la **diferencia** $f-g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:*

$$\begin{array}{ll}
(f+g)(x)=f(x)+g(x) & \text{con dom}\,(f+g)=\text{dom}\,f\cap\text{dom}\,g\\
(f-g)(x)=f(x)-g(x) & \text{con dom}\,(f-g)=\text{dom}\,f\cap\text{dom}\,g\\
(fg)(x)=f(x)g(x) & \text{con dom}\,(fg)=\text{dom}\,f\cap\text{dom}\,g\\
(f/g)(x)=f(x)/g(x) & \text{con dom}\,(f/g)=\{x\in\text{dom}\,f\cap\text{dom}\,g:\ g(x)\neq 0\}
\end{array}$$

Funciones polinomiales y racionales

- Una función polinomial tiene la forma:

  $$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

  donde los coeficientes a_i $(i=0,1,\ldots,n)$ son números reales.
  El dominio de f es todo $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$.
- Una función racional se define mediante el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$:

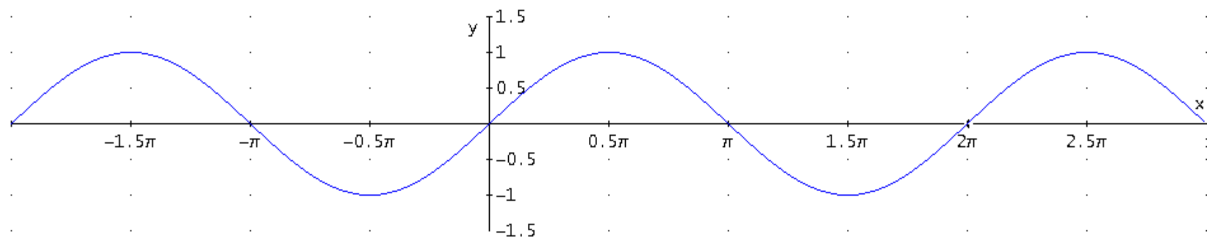
  $$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

  El dominio de f es $\{x\in\mathbb{R}: q(x)\neq 0\}$, todos los números reales salvo las raíces del polinomio denominador.

Funciones trigonométricas

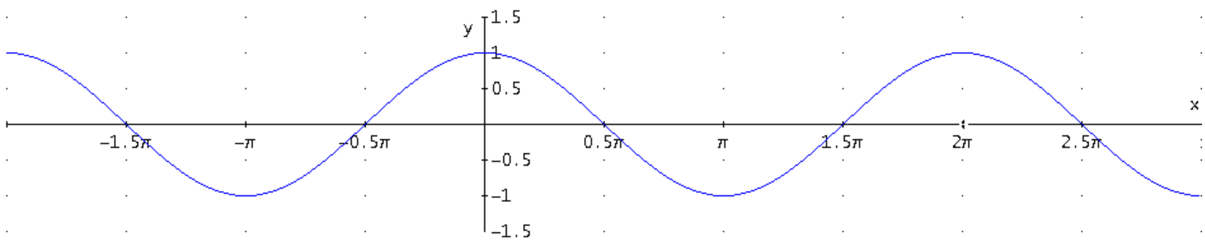
Función seno: $f(x)=\operatorname{sen}x$

- $\text{dom}\,f=\mathbb{R}$ y $\text{rango}\,f=[-1,1]$.
- $f(x)$ se define como el seno de un ángulo de x **radianes**.
- f es una **función impar**, $f(-x)=-f(x)$. La gráfica es simétrica respecto del origen.
- f es una **función periódica** de periodo 2π, $f(x+2\pi)=f(x)$.



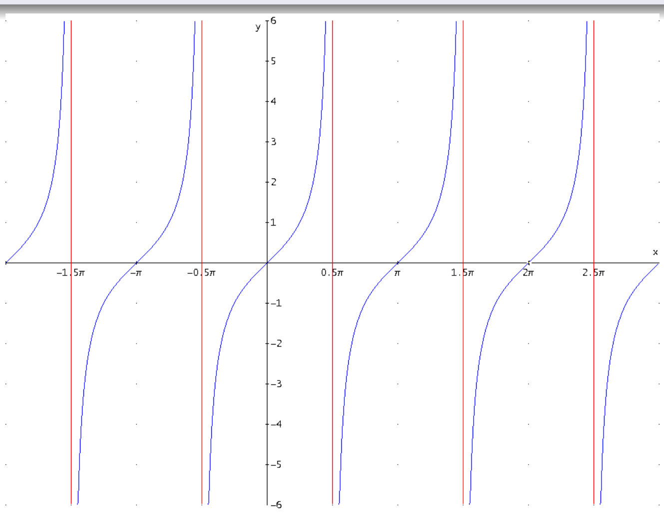
Función coseno: $f(x) = \cos x$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ y $\operatorname{rango} f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ se define como el coseno de un ángulo de x **radianes**.
- f es una **función par**, $f(-x) = f(x)$. La gráfica es simétrica respecto del eje y.
- f es una **función periódica** de periodo 2π, $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Función tangente: $f(x) = \tan x$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $\operatorname{rango} f = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ se define como la tangente de un ángulo de x **radianes**.
- f es una **función impar**, $f(-x) = -f(x)$. La gráfica es simétrica respecto del origen.
- f es una **función periódica** de periodo π, $f(x + \pi) = f(x)$.



Funciones trigonométricas

Tabla de valores conocidos del seno, coseno y tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Funciones exponenciales

Sea $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ y $b \neq 1$ entonces una función exponencial tiene la forma

$$f(x) = b^x$$

Al número b se le denomina **base** y x es el **exponente**.

Propiedades de las potencias

Suponemos $a > 0$, $b > 0$ y $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

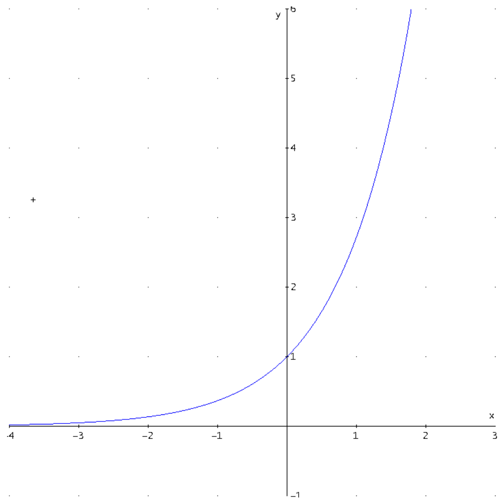
i)	$b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2}$	*ii)*	$\frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1-x_2}$	*iii)*	$(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 \cdot x_2}$
iv)	$\frac{1}{b^x} = b^{-x}$	*v)*	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$	*vi)*	$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Funciones exponenciales

Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$ con $b > 1$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ y $\operatorname{rango} f = (0, \infty)$ $(b^x > 0)$.
- $b^0 = 1$.
- f es una **función creciente** y convexa.

Gráfica de $f(x) = e^x$

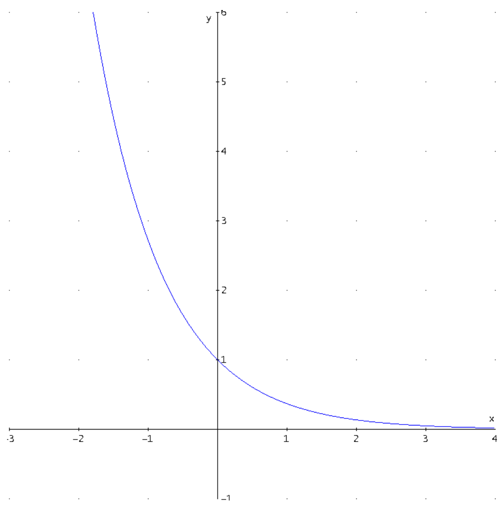


Funciones exponenciales

Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$ con $0 < b < 1$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ y $\operatorname{rango} f = (0, \infty)$ $(b^x > 0)$.
- $b^0 = 1$.
- f es una **función decreciente** y convexa.

Gráfica de $f(x) = e^{-x}$



El número e

e es un número irracional que se puede definir como

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e = 2{,}718281828459045235360287471352662497757\ldots$$

Definición

La función exponencial natural o simplemente la función exponencial es la que tiene por base el número e:

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

Definición (Composición de funciones)

Dadas dos funciones f y g, la composición de f y g, denotada $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

y su dominio es $\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in \operatorname{dom} g\}$.

Propiedades de la composición

1. La composición de funciones es **asociativa**:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
2. La composición de funciones en general **no es conmutativa**:
$$g \circ f \neq f \circ g$$
3. La composición de funciones tiene un elemento neutro, la **función identidad** $e(x) = x$:
$$e \circ f = f \circ e = f$$
4. Dada una función f a veces existe su elemento inverso respecto de la composición que se denota f^{-1}:
$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = e(x) = x$$
y se denomina **función inversa**.

Función Inversa

Definición (Función uno a uno)

Se dice que una función f es ***uno a uno*** *si cada elemento en el rango de f se asocia con exactamente un elemento de su dominio.*
Esto es equivalente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

- *Si $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ y $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- *Si $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$ y $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.*
- *Toda recta horizontal, $y = c$, que corta a la gráfica de f lo hace en un único punto.*

Definición (Función inversa)

Dada una función f uno a uno con dominio A y rango B. La ***inversa*** *de f es la función denotada f^{-1} que tiene dominio B y rango A para la cual*

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para todo } x \in B$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para todo } x \in A$$

Cálculo de la inversa

1. Comprobar que f es uno a uno en su dominio. Si f no es uno a uno se puede elegir una parte del dominio de manera que la nueva función si lo sea y mantenga el rango de f.
2. El dominio y el rango de la función inversa f^{-1} son respectivamente el rango y el dominio de f.
3. Obtener $f^{-1}(x)$ equivale a despejar x en la ecuación $y = f(x)$ obteniéndose $x = f^{-1}(y)$ y a continuación cambiar el nombre a la variable, cambiar y por x.

Funciones logarítmicas

Inversas de las funciones exponenciales

Para $b > 0$ y $b \neq 1$ tenemos una función exponencial de la forma $y = b^x$, que sabemos que es uno a uno de manera que tiene inversa, $f(y)$, que debe cumplir $y = b^{f(y)}$ y también $f(b^x) = x$.

Definición (Función logarítmica)

La función logarítmica de base $b > 0$ y $b \neq 1$ se define:

$$\begin{array}{cccc} f: & (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \log_b x \end{array}$$

donde $y = \log_b x$ es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener x ($b^y = x$).

Propiedades de los logaritmos

Suponemos $b > 0$ y $b \neq 1$, $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$:

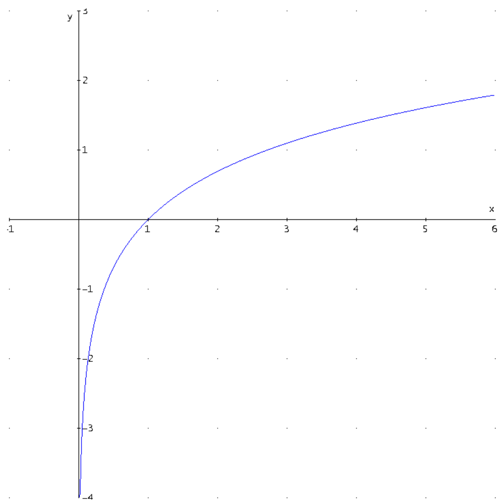
i)	$\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2$	*ii)*	$\log_b\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$
iii)	$\log_b x^c = c \log_b x$	*iv)*	$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x$

Funciones logarítmicas

Propiedades de la función logaritmo $f(x) = \log_b x$ con $b > 1$

- $\operatorname{dom} f = (0, \infty)$ y $\operatorname{rango} f = \mathbb{R}$.
- $\log_b 1 = 0$.
- f es una **función creciente** y cóncava.

Gráfica de $f(x) = \ln x$

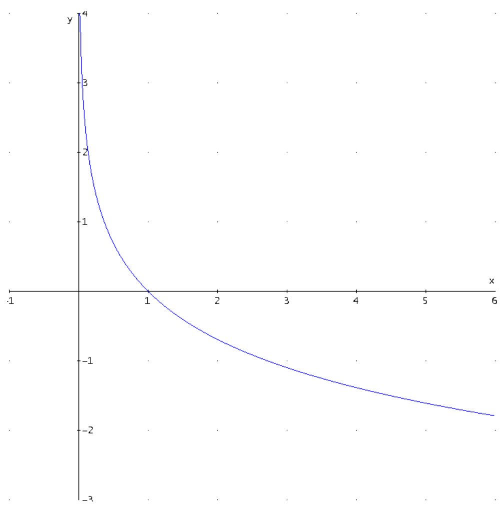


Funciones logarítmicas

Propiedades de la función logaritmo $f(x) = \log_b x$ con $0 < b < 1$

- $\operatorname{dom} f = (0, \infty)$ y $\operatorname{rango} f = \mathbb{R}$.
- $\log_b 1 = 0$.
- f es una **función decreciente** y convexa.

Gráfica de $f(x) = \log_{1/e} x = -\ln x$



Logaritmos naturales

Definición

El ***logaritmo natural o neperiano*** *es el que tiene por base el número e y que denotaremos por* $\ln x$.

Propiedades del logaritmo natural

1. La función $f(x) = \ln x$ es la inversa de la función exponencial:
$$\ln(e^x) = x \text{ y } e^{\ln x} = x$$
2. $\ln 1 = 0$, $\ln x < 0$ si $x \in (0,1)$ y $\ln x > 0$ si $x \in (1, \infty)$.
3. Cualquier logaritmo se puede calcular a partir del logaritmo neperiano:
$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$
4. Cualquier exponencial se puede escribir a partir del número e y el logaritmo neperiano:
$$b^x = e^{(\ln b)x}$$
5. Cualquier función potencial $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede definir a partir de la exponencial y el logaritmo neperiano:
$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$$

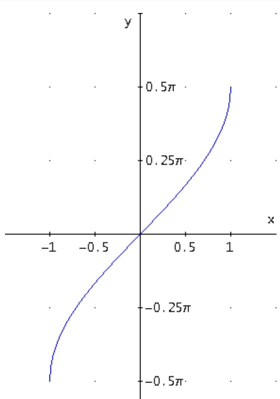
Funciones trigonométricas inversas

Ninguna de las funciones trigonométricas tiene inversa en todo su dominio, pero restrigiéndolo adecuadamente sí.

Función arcoseno: $f(x) = \operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x$

Es la inversa de $y = \operatorname{sen} x$ con dominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:
$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{arcsen} x \end{array}$$
donde $\operatorname{arcsen} x$ es el único ángulo en radianes del intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuyo seno es x.

- $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$.
- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



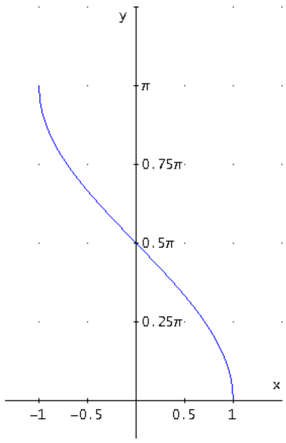
Función arcocoseno: $f(x) = \arccos x = \cos^{-1} x$

Es la inversa de $y = \cos x$ con dominio $[0, \pi]$:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longrightarrow & \arccos x \end{array}$$

donde $\arccos x$ es el único ángulo en radianes del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es x.

- $\cos(\arccos x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$.
- $\arccos(\cos x) = x$ para todo $x \in [0, \pi]$.



Función arcotangente: $f(x) = \operatorname{atan} x = \tan^{-1} x$

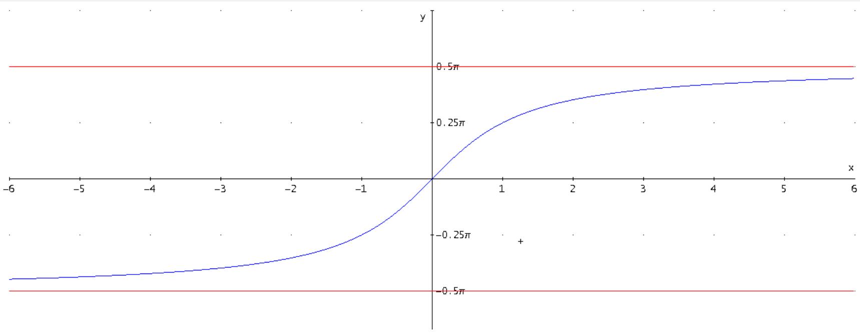
Es la inversa de $y = \tan x$ con dominio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ & x & \longrightarrow & \operatorname{atan} x \end{array}$$

donde $\operatorname{atan} x$ es el único ángulo en radianes del intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cuya tangente es x.

- $\tan(\operatorname{atan} x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\operatorname{atan}(\tan x) = x$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

La gráfica $y = \operatorname{atan} x$ de la función arcotangente tiene una asíntota horizontal $y = \frac{\pi}{2}$ cuando $x \to +\infty$ y otra distinta $y = -\frac{\pi}{2}$ cuando $x \to -\infty$.



Límite de una función en un punto

Definición

Sea f una función definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ aunque no necesariamente en a y $L \in \mathbb{R}$. El ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** a ***es*** L *si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger x suficientemente cerca de a pero distinto de a. Se denota:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Definición (Límites laterales)

El ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** a ***por la izquierda*** (***derecha***) ***es*** L *si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger $x < a$ ($x > a$) suficientemente cerca de a pero distinto de a. Se denota:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = L\right)$$

Teorema

Sea f una función definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ aunque no necesariamente en a y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Límites y operaciones

Teorema (Límites y suma y producto)

Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces

- $\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$.
- $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

Teorema (Límites y cociente)

Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ y éste último es distinto de 0 entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Teorema (Límites y composición)

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to b} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L.$$

Se puede sustituir a en todos los enunciados por a^- o a^+.

Límites y operaciones

Límites y cociente: denominador con límite 0

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textbf{no existe}.$$

2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces no sabemos que ocurre con

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

   Esta situación se denomina **INDETERMINACIÓN** y significa que saber que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ no es suficiente para calcular $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$.

Se puede sustituir a por a^- o a^+.

Más teoremas sobre límites

Teorema

Sean $a, c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\lim_{x\to a} c = c$.
- $\lim_{x\to a} x = a$.

Corolario

Si $f(x)$ es un polinomio o una función racional y $a \in \operatorname{dom} f$ entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Teorema

Si $f(x)$ es una función potencial (x^α), trigonométrica ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$,...), exponencial (b^x), logarítmica ($\log_b x$) o trigonométrica inversa (arcsen x, arccos x, atan x,...) y $a \in \operatorname{dom} f$ entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Límites y orden

Teorema

Sean f y g dos funciones definidas y que verifican $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{g}(\mathbf{x})$ en un entorno de a. Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

Corolario (teorema de compresión o del sandwich)

Sean f, g y h tres funciones definidas y que verifican en un entorno de a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ y son iguales entonces existe $\lim_{x\to a} h(x)$ y se verifica

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Se puede sustituir a en los dos enunciados por a^- (o a^+) y en ese caso la desigualdad basta que se cumpla en un entorno a la izquierda (o a la derecha).

Límites infinitos

Definición

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** $+\infty$ si podemos hacer tan grandes como queramos los valores de $f(x)$ sin más que coger x suficientemente cerca de a pero distinto de a. Se denota:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Definición

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** $-\infty$ si podemos hacer negativos y tan grandes en valor absoluto como queramos los valores de $f(x)$ sin más que coger x suficientemente cerca de a pero distinto de a. Se denota:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Análogamente se definirían los límites infinitos laterales.

Definición (Asíntota vertical)

*Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a (o a^+ o a^-) es $+\infty$ (o $-\infty$) se dice que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$.*

Suma y límites infinitos

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{B}$ son L, $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \mathbf{C}$.

B**A**	**L**	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND.
$-\infty$	$-\infty$	IND.	$-\infty$

Producto y límites infinitos

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{B}$ son L, $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \mathbf{C}$.

B**A**	**0**	$\mathbf{L} \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	IND.	$\mathit{signo}(\mathbf{L})\,\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	IND.	$-\mathit{signo}(\mathbf{L})\,\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Cociente y límites infinitos

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{B}$ son L, $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{C}$.

B**A**	**L**	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	**0**	IND.	IND.
$-\infty$	**0**	IND.	IND.

Límites y cociente: denominador con límite 0

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces

1. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textbf{no existe}.$$

2. $$\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$$

$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ puede ser $+\infty$, $-\infty$ o tomar cada vez valores más grandes sin un signo determinado.

Se puede sustituir a por a^- o a^+.

Límites en el infinito

Definición

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $+\infty$ **es** L si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger x suficientemente grande. Se denota*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Definición

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $-\infty$ **es** L si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger x negativo suficientemente grande en valor absoluto. Se denota*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Definición (Asíntota horizontal)

*Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$, o a $-\infty$, es L se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$.*

Análogamente se definirían los límites infinitos en $+\infty$ y $-\infty$.

Límites en el infinito y operaciones

Teorema (Límites y suma y producto)

Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces

- $\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$.
- $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

*a **puede sustituirse por** $+\infty$ **o** $-\infty$.*

Teorema (Límites y cociente)

Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ y éste último es distinto de 0 entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

*a **puede sustituirse por** $+\infty$ **o** $-\infty$.*

Teorema (Límites y composición)

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to b} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L.$$

*a, b **y** L **pueden sustituirse cada una por** $+\infty$ **o** $-\infty$.*

Límites infinitos en el infinito y operaciones

En los resultados siguientes a **puede sustituirse por** $+\infty$ **o** $-\infty$.

Suma y límites infinitos

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{B}$ son L, $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \mathbf{C}$.

B**A**	**L**	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND.
$-\infty$	$-\infty$	IND.	$-\infty$

Producto y límites infinitos

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{B}$ son L, $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \mathbf{C}$.

B**A**	**0**	$\mathbf{L} \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	IND.	$signo(\mathbf{L})\ \infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	IND.	$-signo(\mathbf{L})\ \infty$	$-\infty$	$+\infty$

Cociente y límites infinitos

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{B}$ son L, $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{C}$.

B**A**	**L**	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	**0**	IND.	IND.
$-\infty$	**0**	IND.	IND.

Límites y cociente: denominador con límite 0

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **no existe** y $\lim_{x\to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.

Límites en un punto

Definición (Límite de una función en un punto)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < |x-a| < \eta$, siendo η un número positivo.

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** L si*
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición (Límite por la izquierda de una función en un punto)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < a - x < \eta$, siendo η un número positivo.
*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **por la izquierda es** L si*
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < a - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición (Límite por la derecha de una función en un punto)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < x - a < \eta$, siendo η un número positivo.
*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **por la derecha es** L si*
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Límites infinitos y en el infinito.

Definición (Límites infinitos)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < |x-a| < \eta$, siendo η un número positivo.

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** $+\infty$ $(-\infty)$ si*
para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$.

Análogamente se definirían los límites infinitos laterales.

Definición (Límites en el infinito)

Sea f una función definida para todo $x > K$ $(x < -K)$, siendo K un número positivo.

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $+\infty$ $(-\infty)$ **es** L si*
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que
si $x > M$ $(x < -M)$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición (Límites infinitos en el infinito)

Sea f una función definida para todo $x > K$ $(x < -K)$, siendo K un número positivo.

*El **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $+\infty$ $(-\infty)$ **es** $+\infty$ $(-\infty)$ si*
para cada $N > 0$ existe un $M > 0$ tal que
si $x > M$ $(x < -M)$ entonces $f(x) > N$ $(f(x) < -N)$.

Funciones continuas

Definición

*Una función $f(x)$ es **continua en un punto** a si*

1. $a \in \operatorname{dom} f$
2. *Existe* $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

*Si alguna de estas condiciones no se cumple se dice que $f(x)$ es **discontinua en el punto** a.*

Una función $f(x)$ es continua en un punto a por la derecha (izquierda) si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ $\left(\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right)$.

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a,b) si es continua en todo punto $x \in (a,b)$.

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en todo punto $x \in (a,b)$, continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

Operaciones con funciones continuas

Teorema

Las funciones polinómicas, racionales, raíces ($\sqrt[n]{x}$), potenciales (x^{α}), trigonométricas ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$,...), exponenciales (b^x), logarítmicas ($\log_b x$) y trigonométricas inversas (arcsen x, arccos x, atan x,...) son continuas en todo su dominio.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el punto a. Entonces también son continuas en a las funciones $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y, si $g(a) \neq 0$, $(f/g)(x)$.

Teorema

Si la función $f(x)$ es continua en el punto a y la función $g(x)$ es continua en el punto $f(a)$ entonces la función $(g \circ f)(x)$ es continua en en el punto a, es decir, la composición de funciones continuas es una función continua.

Teorema

Si $f(x)$ es continua y uno a uno su función inversa $f^{-1}(x)$ también es continua.

Teorema del valor intermedio o de Bolzano

Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea γ cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \gamma$.

Corolario

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ ($f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Corolario

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto (a,b) tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces $f(x)$ conserva el signo en (a,b) (o $f(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ o $f(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$).

Método de bisección.

Ecuación $f(x) = 0$ con f función continua.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ sabemos que existe $c \in (a, b)$ que es raiz de la ecuación.
Para aproximarse a ella se puede utilizar el método iterativo denominado **Método de Bisección**:

Paso 1 Hacemos $u_1 = a$ y $v_1 = b$ y procedemos a la bisección de $[u_1, v_1]$: $m_1 = (u_1 + v_1)/2$ es el punto medio.
Si $f(m_1) = 0$ hemos encontrado la raiz, si no o en $[u_1, m_1]$ o en $[m_1, v_1]$ habrá cambio de signo de f y denominamos $[u_2, v_2]$ a éste intervalo.

Paso n Procedemos a la bisección de $[u_n, v_n]$: $m_n = (u_n + v_n)/2$ es el punto medio.
Si $f(m_n) = 0$ hemos encontrado la raiz, si no o en $[u_n, m_n]$ o en $[m_n, v_n]$ habrá cambio de signo de f y denominamos $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ a éste intervalo.

Al cabo de n iteraciones sabemos que:

$$|m_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Método de bisección.

Ecuación $e^{-x} = \ln x$, en $[1, 2]$.
$f(x) = e^{-x} - \ln x$.
$\alpha = 1{,}3097995858041504776\ldots$

$\mathbf{i}$	$\mathbf{u_i}$	$\mathbf{v_i}$	$\mathbf{m_i}$	$\mathbf{f(u_i)}$	$\mathbf{f(m_i)}$	$\mathbf{f(v_i)}$
1	1	2	1,5	0,367879441	-0,182334948	-0,557811897
2	1	1,5	1,25	0,367879441	0,063361246	-0,182334948
3	1,25	1,5	1,375	0,063361246	-0,065614135	-0,182334948
4	1,25	1,375	1,3125	0,063361246	-0,002787367	-0,065614135
5	1,25	1,3125	1,28125	0,063361246	0,029853807	-0,002787367
6	1,28125	1,3125	1,296875	0,029853807	0,013427263	-0,002787367
7	1,3046875	1,3125	1,30859375	0,005293741	0,00124667	-0,002787367
8	1,30859375	1,3125	1,310546875	0,00124667	-0,000771973	-0,002787367
9	1,30859375	1,310546875	1,309570313	0,00124667	0,000236942	-0,000771973
10	1,309570313	1,310546875	1,310058594	0,000236942	-0,000267617	-0,000771973
11	1,309570313	1,310058594	1,309814453	0,000236942	-1,5363E-05	-0,000267617
12	1,309570313	1,309814453	1,309692383	0,000236942	0,000110783	-1,5363E-05
13	1,309692383	1,309814453	1,309753418	0,000110783	4,77084E-05	-1,5363E-05

Acotación y extremos de un conjunto y de una función.

Definición (Cota superior e inferior. Conjunto acotado)

Sea S un subconjunto no vacio de los números reales, $S \subset \mathbb{R}$ y $S \neq \emptyset$.

- *Se dice que $M \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si para todo $s \in S$ se verifica que $s \leq M$.*
  *Si existe la cota superior se dice que S está **acotado superiormente**.*
- *Se dice que $m \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si para todo $s \in S$ se verifica que $s \geq m$.*
  *Si existe la cota inferior se dice que S está **acotado inferiormente**.*
- *Se dice que S está **acotado** si está acotado superior e inferiormente.*

Definición (Máximo y mínimo.)

Sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$.

- *Se dice que $s_0 \in S$ es el **máximo** de S, y se denota $s_0 = \max S$, si para todo $s \in S$ se verifica que $s \leq s_0$.*
- *Se dice que $s_0 \in S$ es el **mínimo** de S, y se denota $s_0 = \min S$, si para todo $s \in S$ se verifica que $s \geq s_0$.*

Teorema de los valores extremos

Definición (Función acotada y extremos absolutos de una función.)

- *Se dice que una función f está **acotada** (superior o inferiormente) si su rango es un conjunto acotado (superior o inferiormente).*
  Existen $M, m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in \mathrm{dom} f$.
- *Se denominan **máximo y mínimo absolutos** (extremos absolutos) de una función al máximo y el mínimo de su rango.*
  *Se dice que función f alcanza su **máximo absoluto** (**mínimo absoluto**) en $c \in \mathrm{dom} f$ si $f(x) \leq f(c)$ ($f(c) \leq f(x)$) para todo $x \in \mathrm{dom} f$.*

Teorema (de los valores extremos (o de Weierstrass))

Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces alcanza sus extremos absolutos, es decir, existen $c, d \in [a,b]$ tales que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Corolario

Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ existen $c, d \in [a,b]$ tales que $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$.